

APLIKASI KENDALI OPTIMAL MASKER PADA PENCEGAHAN PENYEBARAN ISPA

Application of Optimal Control Face Mask to Prevent the Spread of ISPA

Nilwan Andiraja¹

¹ Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
 Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau

*nilwanandiraja@uin-suska.ac.id

Diterima: 20 Oktober 2025; Direvisi: 27 November 2025; Dipublikasi: 01 Desember 2025



ABSTRACT

Acute Respiratory Tract Infection or Indonesian called ISPA is one of the diseases that easy communicable and often infected adult and children so that it need to be investigated about how to decrease rate of ISPA infected and also control of its spread out. This research aimed to examine whereas effective or not, the application of used of face mask control to decrease ISPA infection. This research creates a state equation by modifying the previous mathematical model by adding the mask control to the susceptible and exposed classes and also creates the objective function. By using Pontryagin Principle, the Hamiltonian function made, then the costate equations and the optimal control function obtained consecutive. Next, solution of state and costate equations obtain by using sweep forward-backward method with Runge-Kutta 4th order. Next step, the numerical simulation did by used data from the previous research. Based on the results of numerical simulations obtained with the control of face mask, individuals infected with ISPA were a maximum of 100 people, but without control it reached 150 people. Furthermore, with face mask control, individuals infected with ISPA less than 100 people within 4 days, but without control it took 6-7 days for individuals infected with ISPA to below 100 people. These results conclude that the use of masks, mathematically, can reduce the number of individuals infected with ISPA so that it can prevent the spread of ISPA.

Keywords: Control; Face Mask; ISPA; Pontyragin; Sweep.

ABSTRAK

Penyakit ISPA merupakan salah satu penyakit yang mudah menyebar dan sering menginfeksi dewasa dan anak-anak sehingga perlu penelitian bagaimana menurunkan tingkat infeksi ISPA dan mengendalikan penyebarannya. Penelitian ini bertujuan untuk meneliti efektif atau tidak, kendali penggunaan masker untuk menurunkan infeksi ISPA. Penelitian ini membentuk persamaan *state* dengan memodifikasi model matematika terdahulu dengan penambahan kendali masker pada kelas *susceptible* dan kelas *exposed* dan juga dibentuk fungsi tujuan. Dengan prinsip Pontryagin, fungsi Hamiltonian dibentuk dan selanjutnya diperoleh persamaan *costate* dan fungsi kendali optimal.

Selanjutnya, solusi persamaan state dan costate didapat menggunakan metode *sweep forward-backward* dengan bantuan metode Runge-Kutta orde 4. Langkah berikutnya dilakukan simulasi numerik dengan mayoritas menggunakan data-data dari penelitian terdahulu. Berdasarkan hasil simulasi numerik diperoleh dengan kendali penggunaan masker individu terinfeksi ISPA maksimal 100 orang namun tanpa kendali mencapai 150 orang. Selanjutnya, dengan kendali masker individu terinfeksi ISPA turun kurang dari 100 orang dalam waktu 4 hari, namun tanpa kendali membutuhkan 6-7 hari agar individu terinfeksi ISPA kurang dari 100 orang. Hasil ini menyimpulkan bahwa penggunaan masker, secara matematis, dapat menurunkan jumlah individu terinfeksi ISPA sehingga dapat mencegah penyebaran ISPA.

Kata Kunci: ISPA; Kendali; Masker; Pontryagin; *Sweep*.

1. PENDAHULUAN

Penyakit ISPA (Infeksi Saluran Pernafasan Akut) merupakan salah satu penyakit yang sering terjadi di Indonesia. Penyakit ISPA sering menyerang bukan hanya orang dewasa tapi juga anak-anak. Penyakit begitu mudah menular antara satu ke lain orang. Kemudahan itu menyebabkan penyakit ISPA sangat mudah menyebar dan berkembang terutama di negara berkembang seperti di Indonesia (Nurazizah, Nurman, and Syata 2024). Hal ini diperparah dengan tingkat kematian akibat ISPA mencapai 4 juta setiap tahunnya (Akbar et al. 2023). Selanjutnya, penyebaran penyakit ISPA harus mendapat perhatian yang serius dalam rangka mencegah penyebarannya. Sebab penyakit infeksi yang mudah menular terutama penyakit infeksi pernafasan yang dapat menginfeksi anak-anak dan dewasa dapat meningkatkan beban ekonomi (anggaran kesehatan) disamping tentu efek kematian bagi penderita (Niederman and Torres 2022). Sehingga perlu dilakukan upaya-upaya dalam mencegah penyebaran penyakit ISPA, salah satunya melalui penelitian atau pengabdian dalam rangka menganalisis cara terbaik untuk mencegah penyebaran penyakit ISPA.

Model matematika merupakan salah satu cara yang baik dan umum dipakai untuk memodelkan secara matematika persoalan penyebaran penyakit seperti penyebaran penyakit ISPA yang kemudian akan ditemukan upaya-upaya pencegahan penyebarannya. Beberapa penelitian yang menggunakan model matematika penyebaran penyakit ISPA diantaranya model SEHAT yang menggabungkan penderita ISPA dan asma dalam satu model, diperoleh bahwa perawatan intensif dapat menyembuhkan penderita ISPA (Nurfadilah, Fardinah, and Hikmah 2021). Penelitian lain dengan model SEIR, yang memodelkan bahwa kelompok terinfeksi dapat disembuhkan tapi setelah sembuh kekebalan tubuh akan menurun, sehingga individu dapat terinfeksi ISPA kembali (Alda, Iknas, and Irwan 2023). Model lain juga telah digunakan yaitu model RLTS, pada penelitian ini diasumsikan kelompok terinfeksi akan sembuh dengan pengobatan dan yang sembuh dapat rentan kembali terinfeksi ISPA (Nurazizah et al. 2024). Penelitian berikutnya kembali menggunakan model SEIR, meneliti penurunan laju kontak individu terinfeksi dengan individu lain untuk pencegahan ISPA, hasilnya bahwa intervensi laju kontak dapat menurunkan penyebaran ISPA (Prastya, Hasibuan, and Simarsoit 2025). Namun, semua penelitian tersebut hanya terbatas menggunakan model matematika tanpa melibatkan kendali optimal, sehingga penelitian-penelitian tersebut belum meneliti seberapa efektifnya upaya-upaya yang telah dilakukan untuk pencegahan penyebaran penyakit ISPA.

Aplikasi kendali optimal dalam membantu meneliti upaya pengendalian penyebaran penyakit telah dilakukan dalam beberapa penelitian diantaranya. Penelitian kombinasi kendali vaksinasi dan pengurangan kontak antar individu dengan model matematika SEIRS untuk pengendalian Tuberkulosis (Ochieng 2025). Penelitian lain untuk penyakit TB dan HBV dengan kendali yaitu pengobatan dan penurunan kontak antar individu untuk model sebanyak 14 sub kelas (Teklu and Abebaw 2024). Penelitian untuk model penyakit flu dengan model SEIQR juga menggabungkan dengan kendali vaksinasi, pengobatan, dan pembatasan sosial (Lamwong and Pongsumpun 2025). Penelitian tentang penyebaran penyakit HIV AIDS dengan model matematika dengan menggunakan kendali penyuluhan kesehatan, konseling, dan pengobatan (Teklu et al. 2025). Selanjutnya, penelitian untuk penyakit kolera dengan model SIHRC dan kendali vaksinasi, peningkatan kualitas air, penyuluhan kesehatan, dan pengobatan (Alemneh et al. 2024). Semua penelitian tersebut merupakan penelitian yang menggunakan atau menggabungkan model matematika dan kendali optimal. Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut dapat dianalisa kondisi populasi sebelum dan setelah diberi kendali sehingga dapat dianalisa keefektifitas penggunaan upaya pencegahan penyebaran suatu penyakit.

Selanjutnya salah satu upaya pengendalian penyebaran penyakit yang berkaitan dengan infeksi pernafasan yaitu penggunaan masker. Penelitian tentang penggunaan masker telah dilakukan seperti penelitian model matematika penyebaran COVID-19 dengan model SAIERUM kendali penggunaan masker, pengobatan dan kendali lain (Sahu and Thakur 2025). Penelitian lain juga tentang pencegahan penyebaran COVID-19 dengan model SEIQR dengan kendali penyuluhan masyarakat penggunaan masker, pengobatan, dan vaksinasi (Ullah et al. 2024). Penelitian lain pencegahan penyebaran COVID-19 dengan model SIQR dengan kendali penggunaan masker dan kendali cuci tangan (Ramesh and Joseph 2024). Penelitian tentang model matematika untuk COVID-19 juga telah dilakukan dengan model SVEIQRD dengan adanya tingkat penggunaan masker untuk pencegahan penyebaran COVID-19 (Naz et al. 2025). Penelitian tentang penggunaan masker untuk pencegahan penyebaran menular dengan model SEIR dengan hasil penggunaan masker dapat mencegah penularan penyakit dengan biaya yang murah (Nabi, Ovi, and Ariful Kabir 2024). Selanjutnya, penelitian untuk kasus penyakit menular dengan model SIRV menggunakan salah satunya kendali penggunaan masker (Nadeem Anjam et al. 2024). Penelitian lain dengan model SEIHR untuk kasus penyebaran COVID-19 juga telah dilakukan dengan kendali penggunaan masker dan vaksinasi (Muthu and Kumar 2024). Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut diketahui bahwa penggunaan masker dapat mencegah penyebaran penyakit menular terutama penyakit yang berkaitan dengan infeksi pernafasan.

Berdasarkan penelitian-penelitian terdahulu diperoleh bahwa untuk meneliti penyebaran penyakit infeksi penafasan dapat dilakukan secara matematis dengan memodelkan penyebaran penyakit salah satunya dengan model SEIR dan selanjutnya mengkombinasikan model matematika dengan upaya kendali agar penyebaran penyakit menular dapat dikendalikan dan individu terinfeksi dapat menurun. Oleh karena itu, penelitian ini akan mengkombinasikan model matematika penyebaran ISPA (Prastya et al. 2025) dengan penggunaan kendali sehingga diperoleh model matematika terbaru untuk penyebaran ISPA

dengan adanya kendali. Pembentukan model matematika baru dengan penambahan kendali ini bertujuan dapat diperoleh hasil secara matematis terpercaya tentang efektivitas penggunaan masker untuk pencegahan penyebaran ISPA. Sehingga dengan hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi tentang efektif atau tidaknya masker dalam mencegah penyebaran ISPA.

2. METODE PENELITIAN

Bentuk penelitian kuantitatif digunakan dalam penelitian ini. Penelitian dilakukan pertama kali dengan menambahkan kendali ke model matematika pada penelitian terdahulu. Pada penelitian ini model matematika yang akan ditambahkan kendali yaitu model matematika SEIR untuk penyebaran penyakit ISPA yang dilakukan oleh (Prastya et al. 2025) dengan bentuk model matematika yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta S(t)I(t) - (\mu + \rho)S(t) \quad (1a)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu + \sigma)E(t) \quad (1b)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \sigma E(t) - (\mu + \gamma + \delta)I(t) \quad (1c)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) + \rho S(t) - \mu R(t) \quad (1d)$$

Keterangan dari notasi-notasi yang dipakai pada persamaan (1a)-(1d) yaitu

$S(t)$: Jumlah individu yang rentan ISPA (*susceptible*) pada waktu t .

$E(t)$: Jumlah individu yang terpapar ISPA (*exposed*) pada waktu t .

$I(t)$: Jumlah individu yang terinfeksi ISPA (*infected*) pada waktu t .

$R(t)$: Jumlah individu yang sembuh dari ISPA (*recovered*) pada waktu t .

Λ : Laju kelahiran individu baru ke dalam populasi.

β : Tingkat transmisi penyakit (probabilitas infeksi per kontak antara individu rentan dan individu terinfeksi).

μ : Tingkat kematian alami (independen dari penyakit).

ρ : Tingkat vaksinasi (proporsi individu rentan yang divaksinasi).

σ : Tingkat transisi dari kelas terpapar ke kelas terinfeksi (invers dari masa inkubasi).

γ : Tingkat pemulihan (invers dari durasi infeksi).

δ : Tingkat kematian akibat penyakit ISPA.

Adapun asumsi-asumsi yang berkaitan dengan model (1a)-(1d) sebagai berikut :

1. Individu yang belum terinfeksi memiliki resiko tertular penyakit.
2. Individu yang telah terinfeksi tetapi belum menunjukkan gejala klinis dan belum dapat menularkan penyakit masuk masa inkubasi yang merupakan periode transisi dari kelas *exposed* ke kelas *infected*.
3. Individu yang terinfeksi dapat menularkan penyakit kepada individu rentan, individu ini mencakup individu yang menunjukkan gejala klinis maupun yang tidak.
4. Individu yang sembuh dari infeksi ISPA akan memiliki kekebalan sementara terhadap penyakit ISPA.

Selanjutnya, model matematika pada persamaan (1a)-(1d) akan dimodifikasi dengan penambahan kendali. Kendali yang akan ditambahkan yaitu kendali penggunaan masker dan akan disimbolkan dengan $u(t)$, dengan penambahan kendali ke dalam model matematika (1a)-(1d) maka akan diperoleh model matematika baru untuk penyebaran ISPA yang dinamakan dengan persamaan *state*. Langkah berikutnya, fungsi tujuan akan dibentuk berdasarkan kendali $u(t)$ dan tujuan dalam penelitian ini yaitu menurunkan jumlah individu terinfeksi ISPA.

Berdasarkan persamaan *state* dan fungsi tujuan yang telah dibentuk, langkah selanjutnya membentuk fungsi Hamiltonian dengan menggunakan prinsip *Pontyragin*. Dengan menggunakan prinsip *Pontyragin* maka setelah dibentuk fungsi Hamiltonian selanjutnya akan dibentuk persamaan *costate*. Persamaan *costate* diperoleh dengan mendeferensialkan secara parsial terhadap *state* fungsi Hamiltonian. Persamaan *costate* akan sangat berguna dalam menganalisa model penyebaran penyakit ISPA setelah diberi kendali optimal dan tanpa kendali optimal. Adapun kendali optimal $u(t)$ akan diperoleh dengan menurunkan secara parsial terhadap $u(t)$ fungsi Hamiltonian.

Setelah diperoleh persamaan *state*, persamaan *costate*, dan kendali optimal. Maka perlu dilakukan simulasi numerik untuk melihat efektif atau tidak penggunaan masker untuk mengendalikan atau menurunkan penyebaran penyakit ISPA. Sebelum dilakukan simulasi numerik, maka akan dirubah persamaan *state* dan persamaan *costate* kebentuk numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Hal ini dilakukan karena bentuk persamaan *state* dan persamaan *costate* berbentuk persamaan diferensial nonlinier yang sulit diperoleh solusi secara analitik. Selanjutnya dengan menggunakan metode *sweep forward-backward* dibentuk langkah maju untuk persamaan *state* dan langkah mundur untuk persamaan *costate*. Langkah berikutnya melakukan simulasi numerik berdasarkan langkah maju untuk persamaan *state* dan langkah mundur untuk persamaan *costate*. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan data-data yang diperoleh dari penelitian yang terdahulu (Prastya et al. 2025). Hal ini dilakukan agar dapat diperoleh hasil perbandingan dalam upaya pencegahan penyebaran ISPA dengan menggunakan kendali penggunaan masker atau tidak menggunakan masker.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan metode penelitian, maka langkah awal pada penelitian ini adalah memodifikasi model matematika penyebaran ISPA pada Persamaan (1a)-(1d) dengan menambahkan kendali $u(t)$ penggunaan masker. Berdasarkan (Sahu and Thakur 2025) dan (Naz et al. 2025) kendali $u(t)$ berupa proporsi dan dinyatakan dengan $(1 - u(t))$. Model matematika setelah diberi kendali $u(t)$ sebagai berikut,

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta(1 - u(t))S(t)I(t) - (\mu + \rho)S(t) \quad 2(a)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta(1 - u(t))S(t)I(t) - (\mu + \sigma)E(t) \quad 2(b)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \sigma E(t) - (\mu + \gamma + \delta)I(t) \quad 2(c)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) + \rho S(t) - \mu R(t) \quad 2(d)$$

Persamaan baru yang diperoleh pada Persamaan (2a) - (2d) selanjutnya disebut persamaan *state*. Selanjutnya setelah diperoleh persamaan *state*, berikutnya dibentuk fungsi tujuan yang meminimumkan jumlah orang terinfeksi ISPA dengan upaya penggunaan kendali masker $u(t)$ yaitu

$$J(u) = \int_0^{T_f} (c_1 I(t) + c_2 u(t)^2) dt \quad (3)$$

dengan c_1 dan c_2 adalah nilai parameter yang penting bagi fungsi tujuan. Setelah diperoleh persamaan *state* dan fungsi tujuan. Selanjutnya, dengan *Pontryagin Principle*, kemudian dibentuk fungsi Hamiltonian berdasarkan Persamaan (2a)-(2d) dan Persamaan (3), sehingga dibentuk fungsi Hamiltonian yaitu

$$\begin{aligned} H = & (c_1 I(t) + c_2 u(t)^2) + \lambda_1 (\Lambda - \beta(1 - u(t))S(t)I(t) - (\mu + \rho)S(t)) \\ & + \lambda_2 (\beta(1 - u(t))S(t)I(t) - (\mu + \sigma)E(t)) + \lambda_3 (\sigma E(t) - (\mu + \gamma + \delta)I(t)) \\ & + \lambda_4 (\gamma I(t) + \rho S(t) - \mu R(t)) \end{aligned} \quad (4)$$

Berdasarkan Persamaan (4), maka selanjutnya fungsi Hamiltonian diturunkan secara parsial terhadap *state* sehingga diperoleh persamaan *costate* yaitu

$$\dot{\lambda}_S = -\frac{\partial H}{\partial S(t)} = \lambda_1 \beta I(t)(1 + u(t)) + \lambda_1 (\mu + \rho) + \lambda_2 \beta I(t)(u(t) - 1) \quad (5a)$$

$$\dot{\lambda}_E = -\frac{\partial H}{\partial E(t)} = \lambda_2 \mu + \lambda_2 \sigma - \lambda_3 \sigma \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_I = -\frac{\partial H}{\partial I(t)} = & -c_1 + \lambda_1 \beta S(t)(1 - u(t)) + \lambda_2 \beta S(t)(u(t) - 1) + \lambda_3 (\mu + \gamma + \delta) \\ & - \lambda_4 \gamma \end{aligned} \quad (5c)$$

$$\dot{\lambda}_R = -\frac{\partial H}{\partial R(t)} = \lambda_4 \mu \quad (5d)$$

Berikutnya, dari fungsi Hamiltonian di Persamaan (4) juga dapat diperoleh fungsi kendali yang optimal yaitu

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u(t)} = 2c_2 u(t) + \lambda_1 \beta S(t)I(t) - \lambda_2 \beta S(t)I(t)$$

Maka diperoleh kendali optimal yang dinotasikan dengan $u^*(t)$ yaitu,

$$u^*(t) = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2c_2} \beta S(t)I(t)$$

Kendali pada Persamaan (6) menurut menurut (Nabi et al. 2024) terletak antara 0 dan 1, sehingga berlaku :

$$u^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2c_2} \beta S(t)I(t) \right\}, 1 \right\} \quad (6)$$

Perasamaan (6) merupakan kendali optimal untuk model matematika penyebaran ISPA dengan kendali penggunaan masker untuk Persamaan *state* (2a)-(2d) dan persamaan *costate*

(5a)-(5d). Langkah berikutnya dilakukan simulasi numerik untuk meneliti seberapa efektif penggunaan masker untuk menurunkan individu terinfeksi ISPA.

Sebelum dilakukan simulasi numerik, dibentuk terlebih dahulu bentuk numerik untuk persamaan *state* dan persamaan *costate*, dengan menggunakan kombinasi metode *sweep forward* (langkah maju) untuk persamaan *state* dan metode *sweep backward* (langkah mundur) untuk persamaan *costate* dengan metode Runge-Kutta orde 4. Setelah dibentuk persamaan *state* dan persamaan *costate* dengan metode *sweep forward-backward* dan metode Runge-Kutta orde 4, selanjutnya dilakukan simulasi numerik. Proses simulasi numerik pada penelitian ini menggunakan data-data yang mayoritas diperoleh dari penelitian (Prastya et al. 2025). Adapun data-data yang digunakan dinyatakan dalam tabel 1.

Tabel 1. Nilai Parameter

Simbol	Nilai	Satuan
Λ	0,02	Perhari
β	0,8	Perhari
μ	0,0001	Perhari
ρ	0,85	Perhari
γ	0,2	Perhari
δ	0,01	Perhari

Source: (Prastya et al. 2025).

Selain data-data pada tabel 1, juga diasumsikan beberapa data untuk melengkapi nilai-nilai parameter diantaranya $\sigma = 0,5$, $S(0) = 200$, $E(0) = 50$, $I(0) = 30$, dan $R(0) = 20$. Dengan menggunakan data-data pada tabel 1 diatas maka simulasi numerik pada penelitian ini dilakukan dengan bantuan *software* Matlab, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

Langkah 1 : Diambil tebakan awal nilai $u(t)^*$ untuk $t \in [0, T_f]$.

Langkah 2 : Digunakan nilai awal nilai $u(t)^*$ pada langkah 1 untuk persamaan *state*, kemudian diselesaikan *forward-step* untuk sistem persamaan *state* menggunakan skema Runge Kutta orde 4.

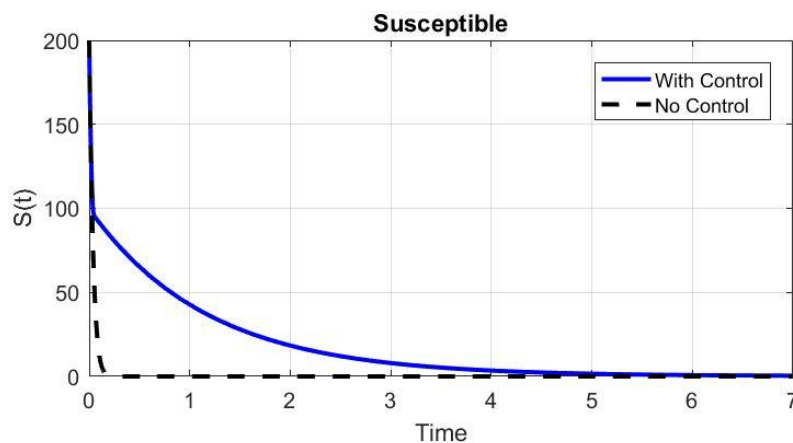
Langkah 3 : Dengan menggunakan nilai batas *costate* $\lambda(T_f) = 0$ dan nilai kendali u dan nilai *state* dari langkah 2, diselesaikan *backward-step* untuk persamaan *costate* menggunakan skema Runge Kutta orde 4.

Langkah 4 : Diulang langkah iterasi dengan memperbaharui nilai $u(t)^*$ dengan memasukkan nilai *state* dan *costate* yang baru ke Persamaan (6).

Hasil dari simulasi numerik dengan langkah-langkah diatas dan menggunakan data tabel 1 diperoleh grafik untuk kasus dengan kendali optimal $u^*(t)$ dan grafik untuk kasus tanpa kendali. Grafik hasil yang diperoleh untuk semua kelas yaitu kelas $S(t)$ (*Susceptible*), $E(t)$ (*Exposed*), $I(t)$ (*Infected*), dan $R(t)$ (*Recovered*) untuk penyebaran penyakit ISPA.

Gambar 1 merupakan gambar hasil simulasi numerik untuk kelas rentan (*susceptible* $S(t)$). Grafik hasil simulasi menunjukkan bahwa untuk jumlah individu yang rentan mengalami

penurunan dengan kondisi menggunakan kendali atau tanpa kendali. Hal ini terlihat mulai dari awal waktu terjadi penurunan yang cepat sampai hari ke-7.

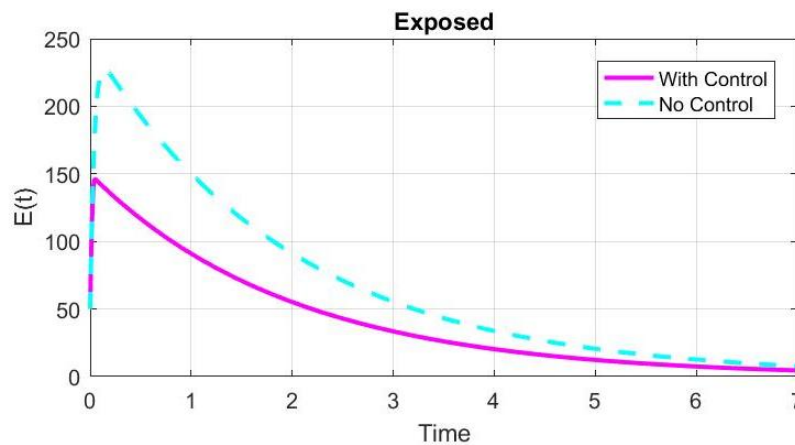


Gambar 1. Grafik hasil kelas *Susceptible* $S(t)$

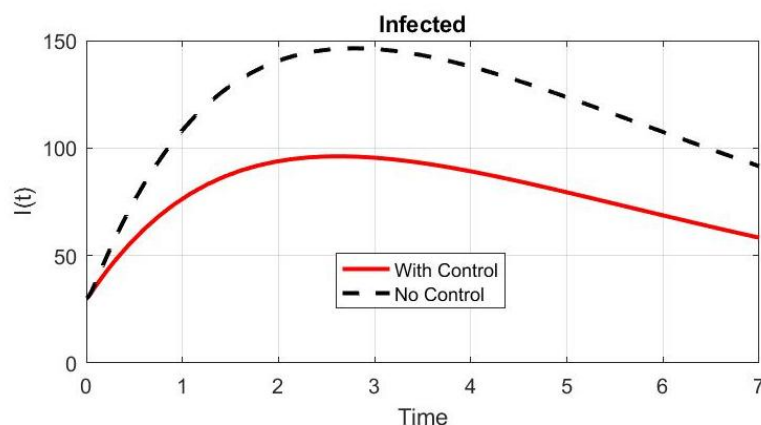
Penurunan ini dapat dipahami karena sejak di kelas *susceptible*, individu telah diberikan vaksinasi. Grafik dengan kendali pada kelas *susceptible* lebih tinggi dibandingkan grafik tanpa kendali, karena dengan kendali penggunaan masker semua individu dinyatakan sebagai *susceptible* walaupun telah diberi vaksin. Sehingga setelah penggunaan masker selama 3 hari, mulai dinyatakan jumlah individu yang rentan berkurang. Sementara tanpa kendali penggunaan masker tidak menganggap individu rentan karena telah diberi vaksinasi. Hasil grafik dari simulasi numerik tanpa kendali ini, sejalan dengan hasil yang diperoleh oleh (Prastya et al. 2025). Pada (Prastya et al. 2025) grafik hasil simulai juga menunjukkan penurunan yang langsung terjadi sejak awal waktu dan selanjutnya grafik kelas *susceptible* tetap rendah mendekati nol.

Selanjutnya, untuk kelas berikutnya yaitu kelas *exposed* (rentan), grafik hasil diberikan pada gambar 2. Pada gambar 2, dapat dilihat bahwa kedua grafik hasil untuk kelas $E(t)$ dengan kendali atau tanpa kendali mengalami peningkatan diawal waktu. Hasil ini juga sesuai dengan penelitian (Prastya et al. 2025) bahwa sempat terjadi peningkatan di kelas *exposed* tapi kemudian seiring waktu terjadi penurunan individu ter-*exposed* ISPA. Hal ini dapat dipahami bahwa walaupun telah diberi vaksin tetap individu dapat terpapar ISPA. Namun, dapat dilihat bahwa peningkatan grafik hasil tanpa kendali penggunaan masker jauh lebih tinggi dibandingkan dengan penggunaan kendali.

Selanjutnya kedua grafik hasil dengan kendali penggunaan masker dan tanpa kendali sama-sama mengalami penurunan. Gambar 2 dapat dilihat penurunan individu yang ter-*exposed* ISPA untuk kasus penggunaan kendali lebih cepat turun turun dibandingkan dengan tanpa kendali. Mulai hari ke-2 sampai hari ke-3 dengan kendali penggunaan masker jumlah individu sudah turun dibawah 50 orang terpapar ISPA, sementara tanpa kendali penggunaan masker, butuh waktu lebih dari 3 hari agar individu terpapar ISPA turun dibawah 50 orang.

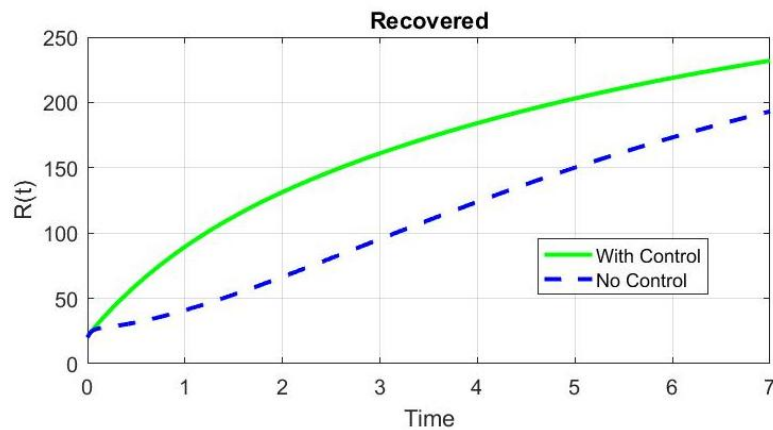
Gambar 2. Grafik hasil kelas *Exposed* $E(t)$

Gambar 3, merupakan gambar grafik hasil simulasi numerik untuk kelas terinfeksi ISPA, yang menampilkan grafik dengan kendali dan tanpa kendali. Berdasarkan gambar 3 dapat dilihat bahwa kedua grafik dengan kendali dan tanpa kendali mengalami fluktuasi naik dan kembali turun. Hasil ini sama dengan hasil penelitian (Prastya et al. 2025) bahwa di penelitian tersebut juga menghasilkan bahwa grafik kelas terinfeksi ISPA mengalami naik dan turun. Namun grafik dengan penerapan kendali masker menunjukkan jumlah individu terinfeksi lebih rendah dibanding dengan tanpa penggunaan kendali masker. Sejak waktu awal sampai satu minggu penggunaan masker, jumlah individu yang terinfeksi ISPA tidak mencapai 100 orang, namun untuk kasus tanpa penggunaan masker jumlah individu terinfeksi ISPA langsung menanjak lebih dari 100 orang, dengan puncaknya hampir 150 orang antara hari ke-2 dan ke-3. Hal ini menunjukkan bahwa penggunaan masker dapat mencegah lebih banyak individu terinfeksi ISPA.

Gambar 3. Grafik hasil kelas *Infected* $I(t)$

Terakhir, gambar 4 dapat dilihat bahwa, grafik kelas *recovered* dengan kendali maupun tanpa kendali juga sama-sama mengalami kenaikan. Kenaikan jumlah individu yang sembuh terjadi sejak awal waktu sampai waktu hari ke-7. Dari gambar 4, dapat dilihat bahwa dengan

penggunaan kendali masker terjadi peningkatan yang lebih cepat dibandingkan tanpa penggunaan masker. Dengan penggunaan masker jumlah orang sembuh telah mencapai 100 orang antara hari ke-1 dan hari ke-2. Sementara tanpa penggunaan masker, jumlah individu yang sembuh mencapai 100 orang lebih dari 3 hari. Secara umum grafik hasil simulasi untuk kelas *recovered* ini sama dengan penelitian terdahulu (Prastya et al. 2025) bahwa terjadi peningkatan individu yang sembuh sejak hari pertama.



Gambar 4. Grafik hasil kelas *Recovered* $R(t)$

Berdasarkan hasil simulasi untuk ke-empat kelas yaitu $S(t)$ (*Susceptible*), $E(t)$ (*Exposed*), $I(t)$ (*Infected*), dan $R(t)$ (*Recovered*) untuk penyebaran penyakit ISPA, didapat bahwa penggunaan kendali menggunakan masker dapat menurunkan dengan lebih cepat jumlah individu yang terinfeksi ISPA. Penggunaan masker bukan hanya menurunkan jumlah individu yang terinfeksi tapi sejak kelas *exposed* juga sudah dapat menurunkan jumlah individu yang terpapar ISPA. Hal ini sesuai dengan penelitian terdahulu, walaupun penelitian-penelitian terdahulu tersebut untuk penyebaran penyakit COVID-19, yang dilakukan oleh (Sahu and Thakur 2025), (Ullah et al. 2024), (Ramesh and Joseph 2024), (Naz et al. 2025), (Nabi et al. 2024), (Nadeem Anjam et al. 2024), dan (Muthu and Kumar 2024) bahwa semua penelitian tersebut menunjukkan bahwa kendali penggunaan masker efektif untuk menurunkan individu terinfeksi penyakit infeksi pernafasan (COVID-19) dan sekaligus mencegah penyebarannya. Selanjutnya, dapat dinyatakan bahwa penggunaan masker tidak hanya efektif mencegah COVID-19 tapi juga efektif mencegah penyebaran penyakit infeksi pernafasan yang lain seperti ISPA.

4. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dan hasil penelitian, seperti terlihat dari grafik hasil untuk keempat kelas yaitu kelas $S(t)$ (*Susceptible*), $E(t)$ (*Exposed*), $I(t)$ (*Infected*), dan $R(t)$ (*Recovered*) untuk penyebaran penyakit ISPA, dapat disimpulkan bahwa kendali penggunaan masker yang ditambahkan ke kelas *susceptible* pada model matematika (Prastya et al. 2025) efektif dan mampu menghasilkan penurunan individu yang ter-*exposed* dan terinfeksi ISPA lebih baik dibandingkan tanpa kendali. Oleh karena itu, dari hasil penelitian ini, sangat penting untuk

menggunakan masker untuk menurunkan jumlah individu terinfeksi ISPA sekaligus untuk mencegah penyebaran penyakit infeksi pernafasan seperti ISPA.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didukung oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sultan Syarif Kasim Riau dan ucapan terima kasih kepada Para dosen dan staf dari Program Studi Matematika yang telah mendukung baik materil maupun doa.

6. REKOMENDASI

Penelitian tentang kendali penggunaan masker untuk mencegah penyebaran penyakit infeksi pernafasan seperti ISPA ini dapat diaplikasikan lebih lanjut ke model matematika lain yang belum menggunakan kendali ini. Penelitian lain seperti (Nurfadilah et al. 2021), (Alda et al. 2023), (Nurazizah et al. 2024) yang belum menerapkan kendali dalam membantu pencegahan penyebaran ISPA, dapat menggunakan kendali penggunaan masker agar upaya pencegahan ISPA dan penurunan individu terinfeksi ISPA berhasil dengan baik dan cepat.

7. DAFTAR PUSTAKA

- Akbar, Zul, Reno Renaldi, Oktavia Dewi, Novita Rany, and Abdurrahman Hamid. 2023. "Perilaku Pencegahan ISPA Di Wilayah Kerja Puskesmas Bunut Kabupaten Pelalawan." *Jurnal Kesehatan Komunitas* 9(1):12–20. doi:10.25311/keskom.vol9.iss1.1127.
- Alda, Alda, Risnawati Ibbas, and Muh Irwan. 2023. "Solusi Numerik Model Penyebaran Penyakit ISPA Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Lima (Studi Kasus : Kabupaten Gowa)." *Jurnal Matematika Dan Statistika Serta Aplikasinya* 11(2).
- Alemneh, Haileyesus Tessema, Shewafera Wondimagegnhu Teklu, Belela Samuel Kotola, and Kassahun Getnet Mekonen. 2024. "Investigation of an Optimal Control Strategy for a Cholera Disease Transmission Model with Programs." *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics* 10. doi:10.3389/fams.2024.1462701.
- Lamwong, Jiraporn, and Puntani Pongsumpun. 2025. "Optimal Control and Stability Analysis of Influenza Transmission Dynamics with Quarantine Interventions." *Modeling Earth Systems and Environment* 11(4). doi:10.1007/s40808-025-02413-z.
- Muthu, Poosan Mooppanar, and Anagandula Praveen Kumar. 2024. "Optimal Control and Bifurcation Analysis of SEIHR Model for COVID-19 with Vaccination Strategies and Mask Efficiency." *Computational and Mathematical Biophysics* 12(1). doi:10.1515/cmb-2023-0113.
- Nabi, Khondoker Nazmoon, Murshed Ahmed Ovi, and K. M. Ariful Kabir. 2024. "Analyzing Evolutionary Game Theory in Epidemic Management: A Study on Social Distancing and Mask-Wearing Strategies." *PLoS ONE* 19(6):1–24. doi:10.1371/journal.pone.0301915.
- Nadeem Anjam, Yasir, Iqra Shahid, Homan Emadifar, Salman Arif Cheema, and Mati ur Rahman. 2024. "Dynamics of the Optimality Control of Transmission of Infectious

- Disease: A Sensitivity Analysis.” *Scientific Reports* 14(1):1–19. doi:10.1038/s41598-024-51540-7.
- Naz, Shabana, Muhammad Sarwar, Kamal Shah, Nahid Fatima, and Thabet Abdeljawad. 2025. “A Mathematical Model of COVID-19 Using Piecewise Derivative of Fractional Order.” *European Journal of Pure and Applied Mathematics* 18(2):1–33. doi:10.29020/nybg.ejpam.v18i2.5861.
- Niederman, Michael S., and Antoni Torres. 2022. “Respiratory Infections.” *European Respiratory Review* 31(166):1–2. doi:10.1183/16000617.0150-2022.
- Nurazizah, Nurazizah, Try Azisah Nurman, and Ilham Syata. 2024. “PENYELESAIAN MODEL PENYEBARAN PENYAKIT ISPA DENGAN MENGGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA FEHLBERG DI PROVINSI SULAWESI SELATAN.” *AL-Aqlu : Jurnal Matematika, Teknik Dan Sains* 2(1):79–92. doi:https://doi.org/10.59896/aqlu.v2i1.55.
- Nurfadilah, Fardinah, and Hikmah. 2021. “Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Ispa.” *JOMTA Journal of Mathematics: Theory and Applications* 3(1):14–22.
- Ochieng, Francis Oketch. 2025. “SEIRS Model for TB Transmission Dynamics Incorporating the Environment and Optimal Control.” *BMC Infectious Diseases* 25(1). doi:10.1186/s12879-025-10710-2.
- Prastya, Riza, Aldha Aulia Hasibuan, and Goffri Simarsoit. 2025. “MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN ISPA (INFEKSI SALURAN PERNAPASAN AKUT) DAN PNEUMONIA BERBASIS INTEGRAL TAK WAJAR : ANALISIS LAJU INFEKSI DAN PROSPEK VAKSINASI.” *MATHunesa Jurnal Ilmiah Matematika* 13(02).
- Ramesh, R., and G. Arul Joseph. 2024. “The Optimal Control Methods for the Covid-19 Pandemic Model’s Precise and Practical SIQR Mathematical Model.” *IAENG International Journal of Applied Mathematics* 54(8):1657–72.
- Sahu, G. P., and A. .. Thakur. 2025. “Mathematical Modeling of COVID-19 Spread with Media Coverage and Optimal.” *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization* 15(3):952–92. doi:doi.org/10.22067/ijnao.2025.92605.1612.
- Teklu, Shewafera Wondimagegnhu, and Yohannes Fissha Abebaw. 2024. “Analysis of the HBV and TB Coinfection Model With Optimal Control Strategies and Cost-Effectiveness.” *Discrete Dynamics in Nature and Society* 2024(1). doi:10.1155/2024/8811930.
- Teklu, Shewafera Wondimagegnhu, Tibebu Tulu Guya, Belela Samuel Kotola, and Tsegaye Simon Lachamo. 2025. “Analyses of an Age Structure HIV/AIDS Compartmental Model with Optimal Control Theory.” *Scientific Reports* 15(1):1–18. doi:10.1038/s41598-024-82467-8.
- Ullah, Ibad, Nigar Ali, Ihtisham Ul Haq, Mohammed Daher Albalwi, Shah Muhammad, and Mohammad Shuaib. 2024. “Comprehensive Analysis of COVID-19 Transmission Dynamics: Mathematical Modeling, Stability Analysis, and Optimal Control Strategies.” *Physica Scripta* 99(7). doi:10.1088/1402-4896/ad562c.